PART5 平方完成と $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

要点① x^2+bx+c の平方完成

$y=ax^2+bx+c$ の形を２次関数の「一般形」，$y=a(x-p)^2+q$ の形を２次関数の「標準形」という。一般形 $y=ax^2+bx+c$ で表された２次関数のグラフをかくためには，この式を標準形 $y=a(x-p)^2+q$ に変形すればよい。

２次式 ax^2+bx+c を $a(x-p)^2+q$ の形に変形することを「　　　　　」する，という。

例 x^2-6x を平方完成する。

$x^2-6x\quad=(x-\quad)^2$ より

$x^2-6x\quad=(x-3)^2$

x^2-6x
↓半分
$=(x-3)^2-3^2$
↑その２乗を引く

x^2 の係数が１の２次関数 $y=x^2+bx+c$ について

$$y=x^2+bx+c=\left(x+\quad\right)^2\qquad+c$$

と平方完成することにより，グラフの軸，頂点を求め，グラフをかくことができる。

例 $y=x^2+5x+2$ のグラフをかく

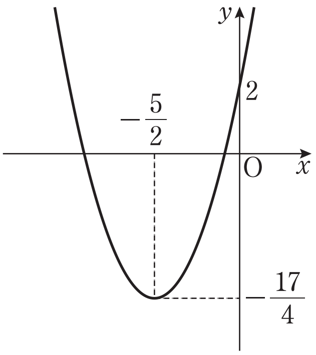
$y=x^2+5x+2$

$=\left(x+\quad\right)^2$

$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$

$=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2$

軸は直線　　　　　頂点は点



要点 ② ax^2+bx+c の平方完成

x^2 の係数が 1 ではない 2 次関数，すなわち $y=ax^2+bx+c$（$a \neq 0$）の平方完成は，定数項 c 以外の項を　　　　　　　　ことで，x^2 の係数が 1 のときの平方完成と同じ変形を行うことができる。

例 $2x^2-4x+3$ を平方完成する。

$$2x^2-4x+3= \qquad\qquad +3$$

$$=2\ (x \quad)^2 \qquad +3$$

$$=2(x-1)^2- \quad 1+3$$

$$=2(x-1)^2+1$$

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$（$a \neq 0$）について

$$y=ax^2+bx+c=a\left(x^2+ \qquad \right)+c$$

$$=a\left(x+ \qquad \right)^2 \qquad\qquad +c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-a\cdot\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

と平方完成することができる。よって，次のことが成り立つ。

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを平行移動した放物線で

軸は 直線 $x=-\dfrac{b}{2a}$，　　頂点は 点 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

5 次の 2 次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y=x^2-6x-1$ (2) $y=x^2+4x+5$

(3) $y=2x^2+4x-5$ (4) $y=-x^2-8x$

(5) $y=-3x^2+3x+2$ (6) $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$

Point Pickup

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

ax^2+bx+c を「　　　　　　　」し，$y=a(x-p)^2+q$ の形にする。手順は以下。

① 定数項 c 以外の項を，x^2 の係数 a でくくる。

② (　) の中の 2 次式を，以下の変形を用いて平方完成する。

$$a(x^2+\bullet x)=a\left\{\left(x+\quad\right)^2-\left(\quad\right)^2\right\}$$

このとき，外側の (　) は {　} となる。

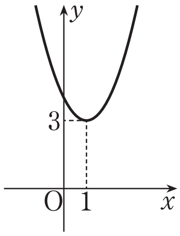
③ {　} の前の数 a を {　} の中に分配し，{　} をはずす。

④ 整理して $y=a(x-p)^2+q$ の形にする。

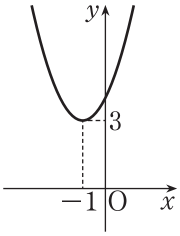
第7講 PART5 確認問題

1 $y=x^2+2x+4$ のグラフの頂点は，点 $\left(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}\right)$ である。また，グラフを次の①～③のうちから選べ。$\boxed{\text{エ}}$

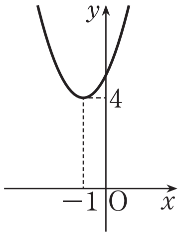
①



②



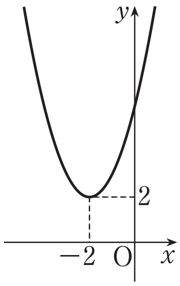
③



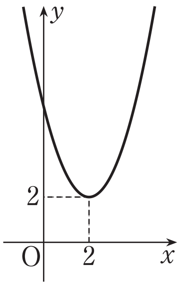
2 $y=x^2-4x+6$ のグラフの頂点は点 $\left(\boxed{\text{オ}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$ である。

また，グラフを次の①～③のうちから選べ。$\boxed{\text{キ}}$

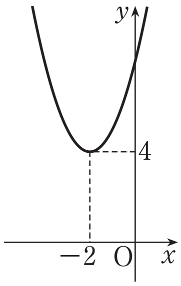
①



②



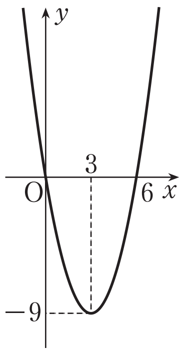
③



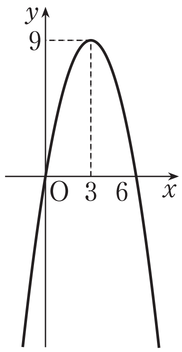
3 $y=-x^2+6x$ のグラフの頂点は点 $\left(\boxed{\text{ク}},\ \boxed{\text{ケ}}\right)$ である。

また，グラフを次の①～③のうちから選べ。$\boxed{\text{コ}}$

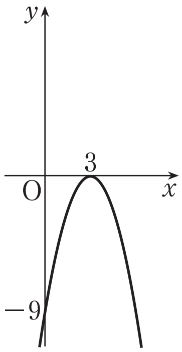
①



②

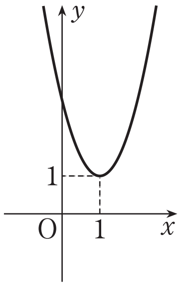


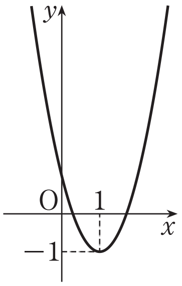
③

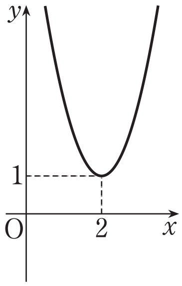


4　$y=2x^2-4x+3$ のグラフの頂点は点 ([サ] , [シ]) である。

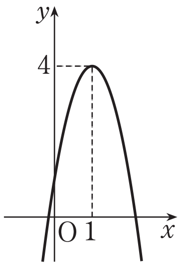
また，グラフを次の①～③のうちから選べ。[ス]

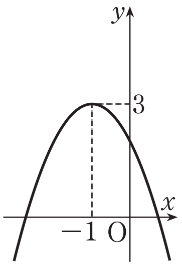
①


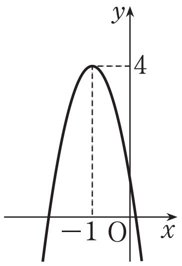
②


③


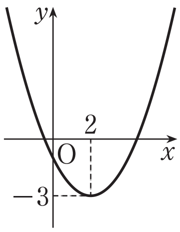
5　$y=-3x^2-6x+1$ のグラフの頂点は点 ([セソ] , [タ]) である。また，グラフを次の①～③のうちから選べ。[チ]

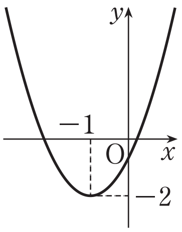
①


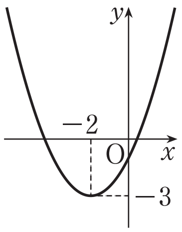
②


③


6　$y=\frac{1}{2}x^2+2x-1$ のグラフの頂点は点 ([ツテ] , [トナ]) である。また，グラフを次の①～③のうちから選べ。[ニ]

①


②


③


[MEMO]

PART5 平方完成と $y=ax^2+bx+c$ のグラフ

5 次の２次関数のグラフの軸と頂点を求め，そのグラフをかけ。

(1) $y=x^2-6x-1$　　(2) $y=x^2+4x+5$

(3) $y=2x^2+4x-5$　　(4) $y=-x^2-8x$

(5) $y=-3x^2+3x+2$　　(6) $y=\dfrac{1}{2}x^2-2x+3$

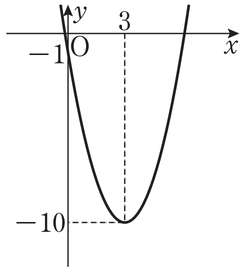
[解答]

(1) $y=x^2-6x-1$

$=(x-3)^2-3^2-1$

$=(x-3)^2-10$

軸は直線 $x=3$，頂点は点 $(3,\ -10)$

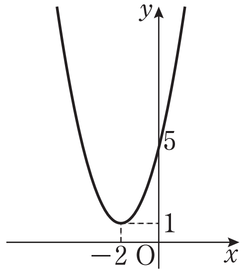


(2) $y=x^2+4x+5$

$=(x+2)^2-2^2+5$

$=(x+2)^2+1$

軸は直線 $x=-2$，頂点は点 $(-2,\ 1)$



(3) $y=2x^2+4x-5$

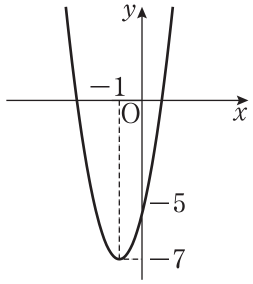
$=2(x^2+2x)-5$

$=2\{(x+1)^2-1^2\}-5$

$=2(x+1)^2+2\cdot(-1)-5$

$=2(x+1)^2-7$

軸は直線 $x=-1$，頂点は点 $(-1,\ -7)$



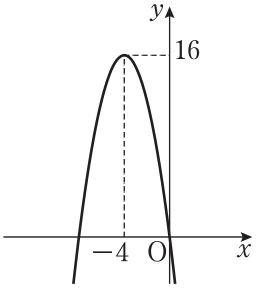
(4)　$y=-x^2-8x$

$=-(x^2+8x)$

$=-\{(x+4)^2-4^2\}$

$=-(x+4)^2+16$

軸は直線 $x=-4$，頂点は点 $(-4,\ 16)$



(5)　$y=-3x^2+3x+2$

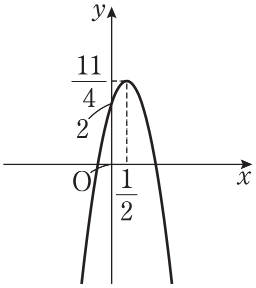
$=-3(x^2-x)+2$

$=-3\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}+2$

$=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\frac{1}{4}+2$

$=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

軸は直線 $x=\frac{1}{2}$，頂点は点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{11}{4}\right)$



(6)　$y=\frac{1}{2}x^2-2x+3$

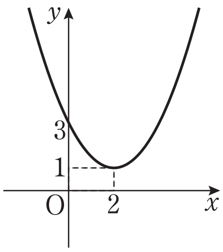
$=\frac{1}{2}(x^2-4x)+3$

$=\frac{1}{2}\{(x-2)^2-2^2\}+3$

$=\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{1}{2}\cdot(-4)+3$

$=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$

軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ 1)$



第 7 講　PART5 確認問題 解答

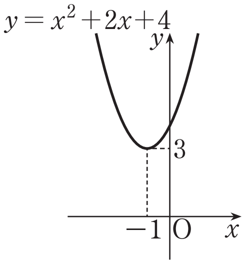
1

[正解] アイ：-1，ウ：3，エ：②

[解説]

$$y=x^2+2x+4$$
$$=(x+1)^2-1^2+4 \quad \text{[A]}$$
$$=(x+1)^2+3$$

グラフの頂点は，点 $(-1,\ 3)$



[A]　x^2+bx+c の平方完成

$$x^2+bx+c$$
$$=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c$$

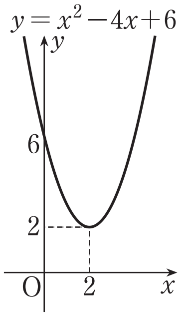
2

[正解] オ：2，カ：2，キ：②

[解説]

$$y=x^2-4x+6$$
$$=(x-2)^2-2^2+6 \quad \text{[B]}$$
$$=(x-2)^2+2$$

グラフの頂点は，点 $(2,\ 2)$



[B]　x^2+bx+c の平方完成

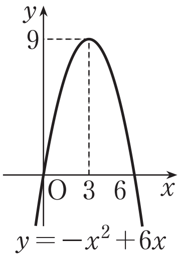
$$x^2+bx+c$$
$$=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b^2}{4}+c$$

3 [正解] ク：3，ケ：9，コ：②

[解説]

$$y=-x^2+6x$$
$$=-(x^2-6x)$$ [C]
$$=-\{(x-3)^2-3^2\}$$
$$=-(x-3)^2+9$$

グラフの頂点は，点 **(3，9)**



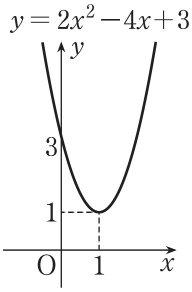
[C]　まず「−」をかっこの外に出す。
2 次関数
$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$
のグラフは
軸は　$x=-\dfrac{b}{2a}$
頂点は　$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

4 [正解] サ：1，シ：1，ス：①

[解説]

$$y=2x^2-4x+3$$
$$=2(x^2-2x)+3$$ [D]
$$=2\{(x-1)^2-1^2\}+3$$
$$=2(x-1)^2+1$$

グラフの頂点は，点 **(1，1)**



[D]　まず x^2 と x の項を x^2 の係数 2 でくくる。
2 次関数
$y=ax^2+bx+c\quad(a\neq 0)$
のグラフは
軸は　$x=-\dfrac{b}{2a}$
頂点は　$\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

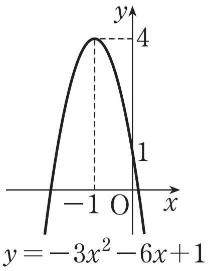
5 [正解] セソ：-1，タ：4，チ：③

[解説]

$$y=-3x^2-6x+1$$
$$=-3(x^2+2x)+1 \quad \text{[E]}$$
$$=-3\{(x+1)^2-1^2\}+1$$
$$=-3(x+1)^2+4$$

[E]　まず x^2 と x の項を x^2 の係数 -3 でくくり，平方完成を行う。

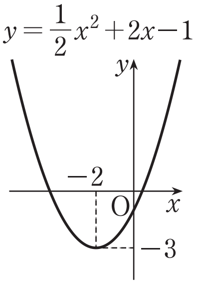
グラフの頂点は，点 $(-1,\ 4)$



6 [正解] ツテ：-2，トナ：-3，ニ：③

[解説]

$$y=\frac{1}{2}x^2+2x-1$$
$$=\frac{1}{2}(x^2+4x)-1 \quad \text{[F]}$$
$$=\frac{1}{2}\{(x+2)^2-2^2\}-1$$
$$=\frac{1}{2}(x+2)^2-3$$

[F]　まず x^2 と x の項を x^2 の係数 $\frac{1}{2}$ でくくり，平方完成を行う。

グラフの頂点は，点 $(-2,\ -3)$